SUNGARD
cadextan
ARMONYS

Sous-évaluation des prix d'options par le modèle de Black & Scholes.

Mise en évidence par une dynamique combinant mouvement brownien et processus à sauts.

Marc Debersé – octobre 06

Résumé

S'il est bien connu que le modèle de F. Black et de M. Scholes est certainement l'un des modèles d'évaluation les plus répandus en finance, les hypothèses qui étayent ce modèle sont souvent oubliées. Taux d'intérêt sans risque constant quelle que soit l'échéance, absence d'opportunité d'arbitrage, titres parfaitement divisibles, transactions continues sans impôts ni coûts de transaction (marchés parfaits), cours de l'actif sous-jacent suivant un mouvement brownien géométrique, ne détachant aucun dividende, options devant être européennes, rendement normal et volatilité constante, telles sont ces hypothèses. L'hypothèse de normalité du rendement de l'actif sous-jacent, combinée à une volatilité constante implique toutefois une sous évaluation des options en dehors de la monnaie.

La modélisation log-normale de l'actif sous-jacent est également un biais puisque les événements à chocs ne sont pas pris en compte. Si on tient compte de ces événements rares, on peut alors montrer que le prix des options incluant ces chocs ont un prix supérieur aux prix des options évaluées par le modèle de Black & Scholes. Les actifs contingents sont donc sous évalués par le modèle de Black & Scholes.

C'est une simulation du type Monte-Carlo dans laquelle, les dates de sauts sont aléatoires, le nombre de sauts varie et l'amplitude du saut suit une loi de Bernouilli qui nous permet de mettre en évidence ce constat.

1. Introduction

Dans un marché parfait, marché dans lequel il n'existe ni coûts de transaction, ni taxes etc…, et complet c'est à dire que tout actif est dupliquable, s'il n'existe aucune possibilité d'arbitrage, i.e. que le taux d'emprunt est le même que le taux d'épargne, considéré comme une constante, r, alors le prix d'une option doit être égal à l'espérance actualisée de ses gains futurs.

Dans le cas d'une option d'achat de type européen qui confère à son acquéreur le droit, mais non l'obligation, d'acheter à l'échéance T une certaine quantité d'actif sous-jacent S à un prix déterminé K, la valeur d'un call vaut :

$$C_t = e^{-r(T-t)}\, E_P\left[Max(S_T - K;0) / F_t\right]$$

Où $E_P[.]$ est l'espérance sous la mesure de probabilité historique et F_t est la filtration naturelle du processus $(S_t)_{t\in[O;T]}$.

Une formule analytique ou forme fermée peut être alors obtenue, en supposant, comme dans le modèle de Black & Scholes (1973)[I], que le prix de l'actif sous-jacent suit une distribution log-normale.

Dans le modèle de Black & Scholes, nous étudions un marché dans lequel sont échangés un actif sans risque et un actif risqué. Nous supposons que l'actif sans risque a un taux de rendement nul tel que $S_t^0 = 1, \forall t \geq 0$ et que la dynamique de l'actif risqué S est donnée par l'équation :

$$dS_t = S_t \left(\mu \, dt + \sigma \, dW_t \right)$$

Où $W = (W_t, t \geq 0)$ est un mouvement brownien,

$\mu \, et \, \sigma$ sont des constantes,

μ désigne le rendement instantané de S ,

σ désigne l'écart type instantané de S ,

Principalement fondé sur le modèle d'A.O.A., Absence d'Opportunité d'Arbitrage, le prix d'une option d'achat européenne se calcule comme suit :

On calcule $C_t = E_P \left[e^{-r(T-t)} \, (S_T - K)^+ / F_t \right]$

$$= e^{-r(T-t)} \, E_P \left[\, (S_T - K) 1_{\{S_T \geq K\}} \, \right] \text{ puisque que r n'est pas stochastique,}$$

$$= e^{-r(T-t)} E_P \left[\, S_T \, 1_{\{S_T \geq K\}} \right] - e^{-r(T-t)} \, K \, E_P \left[1_{\{S_T \geq K\}} \right]$$

$$= e^{-r(T-t)} E_P \left[\, S_T \, 1_{\{S_T \geq K\}} \right] - e^{-r(T-t)} \, K \, P[S_T \geq K]$$

Le théorème de Girsanov nous permet d'écrire $\dfrac{dP}{dQ} = \dfrac{e^{-r(T-t)} S_T}{S_0 \, e^{-r0}} \Leftrightarrow dW_t = dW_t^* - \dfrac{\mu - r}{\sigma} \, dt$

Et donc $C_t = S_0 \, Q \, [S_T \geq K] - e^{-r(T-t)} \, K \, P[S_T \geq K]$ [II]

D'où le résultat du prix d'un call :

$$\boxed{\begin{gathered} C_t = S_0 \, N(d_1) - e^{-r(T-t)} \, K \, N(d_2) \\ d_2 = \frac{\ln(S_0 / K) + (r - \sigma^2 / 2)(T - t)}{\sigma \sqrt{T - t}} \\ d_1 = d_2 - \sigma \sqrt{T - t} \end{gathered}}$$

I Black and Scholes Black F., Scholes M., "The Pricing of Options and Corporate Liabilities", Journal of Political Economy (May-June 1973).

II Q désigne la probabilité risque neutre

2. Modèle à sauts

L'approche de Black et de Scholes est remarquable puisqu'elle donne, sous forme analytique, une relation dite fonctionnelle entre le prix de l'option et cinq paramètres qui, exceptée la volatilité implicite de l'actif sous-jacent, sont observables, mais elle souffre de biais systématiques qui peuvent se voir dans les prix observés sur le marché.

En particulier, la formule de Black & Scholes sous-évalue les options en dehors de la monnaie et dans une moindre mesure, les options dans la monnaie, du fait de l'hypothèse de normalité du rendement de l'actif sous-jacent, combinée à l'hypothèse de volatilité constante.

En effet, la distribution des rendements des actifs financiers se caractérise par un coefficient d'asymétrie différent de zéro, ce qui signifie que la distribution des rendements n'est pas symétrique, et par un coefficient d'aplatissement supérieur à 3, ce qui signifie que notre distribution possède des queues épaisses. Or, la valeur des options dont le prix d'exercice est éloigné du prix courant de l'actif sous-jacent est particulièrement sensible aux événements rares et, si ces événements sont plus fréquents que ne le suppose une distribution normale, alors le prix des options en dehors de la monnaie et le prix des options dans la monnaie sera plus élevé que ne le prévoit le modèle.

En outre, la mauvaise spécification des moments d'ordre 3 et 4 se manifeste également lorsqu'on compare la volatilité implicite. On parle alors de smile de volatilité, forme croissante de la volatilité en fonction du prix d'exercice, voire aujourd'hui d'une forme décroissante de la volatilité en fonction du strike, c'est à dire de smirk (rictus), de sneer ou de grim (grimace), les opérateurs redoutant davantage la probabilité d'une baisse brutale des cours depuis la crise boursière d'octobre 1987 et les attentats du 11 septembre 2002.

La modélisation log-normale est donc insuffisante et un raffinement s'avère nécessaire. Les événements rares ou les chocs brutaux comme la publication d'un chiffre économique ou une décision politique qui peuvent affecter les cours ou les taux de manière violente peuvent être modélisés par un processus de poisson. Dans un modèle à sauts, l'actif risqué suit une dynamique complexe où la statistique log-normale est préservée, mais à certaines dates, qui sont des temps d'arrêt, le processus est discontinu.

Nous nous plaçons alors un marché dans lequel sont échangés un actif sans risque et un actif risqué. Nous supposons que l'actif sans risque a un taux de rendement nul tel que $S_t^0 = 1, \forall t \geq 0$ et que la dynamique de l'actif actif est donné par l'équation

$$dS_t = S_t^- \left(\mu\, dt + \sigma\, dW_t + \Phi\, dM_t\right)$$

Où $W = (W_t, t \geq 0)$ est un mouvement brownien et où $M_t, t \geq 0$ est la martingale compensée[III] d'un processus de Poisson, M_t *et* W_t étant indépendants et où μ, σ, Φ sont des constantes, $\Phi > -1$ de sorte que les prix soient positifs.

La distribution de poisson est souvent utilisée pour décrire le nombre de réalisations d'un événement dont la probabilité est faible, et c'est d'ailleurs pourquoi on parle de « loi des événements rares ».

Le prix de notre option est alors toujours donné par l'expression :

$$C_t = e^{-r(T-t)}\, E_P\left[Max(S_T - K; 0) / F_t\right]$$

[III] M_t est définie par la relation $M_t = N_t - \lambda t$, où λ est l'intensité d'un processus de Poisson.

Où $E_P[.]$ est l'espérance sous la mesure de probabilité risque-neutre et F_t est la filtration associée au brownien et au processus de poisson, $F_t = F_t^N \otimes F_t^W$.

Il est alors nécessaire de connaître l'équation de S_t. Cette expression est bien connue dans la littérature financière. C'est une variante du lemme d'Itô qui nous l'expression de S_t.

Le lemme d'Îto appliqué aux processus à sauts donne,

$$dY_t = f^{'}(S_t)\, dS_t + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2\ f''(S_t)\, dt + [f(S_{t+dt}) - f(S_t)]dN_t - f^{'}(S_t)\,\Delta S_t$$

En appliquant ce résultat à $dY_t = \ln(S_t)$ on obtient :

$$S_t = S_0 \exp\left\{\left[r - \frac{\sigma^2}{2} - \lambda\Phi\right]t + \sigma W_t + N_t \ln(1+\Phi)\right\}$$

Pour calculer la valeur d'un call, tel que défini précédemment, on peut se référer à l'article de Merton (1976)[IV] où la distribution de l'amplitude est supposée log-normale. Cette hypothèse impose toutefois que les sauts aient toujours la même et unique direction si bien qu'ils ne peuvent être tantôt négatifs ou tantôt positifs. Cette supposition forte a le mérite de fournir une nouvelle formule fermée, mais nous allons quant à nous postuler que les sauts auront une amplitude positive ou négative et que le nombre de sauts négatifs est égal en moyenne au nombre de sauts positifs.

C'est par le biais de la simulation numérique de Monte-Carlo que nous déterminons le prix du call. On montrera alors que le prix du call dans un modèle à sauts est légèrement supérieur au prix d'un call évalué par le modèle de Black et de Scholes.

3. Simulation

Déterminer le prix d'un call par simulation revient avant tout à simuler la trajectoire du sous-jacent, compte tenu de sa dynamique. Certes, nous devons simuler un mouvement brownien et un processus de poisson mais on se heurte également à plusieurs problèmes : Nous devons connaître la trajectoire du brownien $W_s, s \le T$, sa valeur terminale W_T, mais également le nombre de sauts N_T sur l'intervalle $[0;T]$, les instants auxquels il surviennent, $N_s, s \le T$, tout comme la valeur terminale de l'actif sous-jacent, i.e. S_T [V]. Enfin, comme nous l'avons indiqué plus haut, les sauts auront une amplitude positive ou négative et le nombre de sauts négatifs sera égal en moyenne au nombre de sauts positifs, cela signifie que l'amplitude suit une loi de Bernouilli.

[IV] Merton, "*Option pricing when underlying stock returns are discontinuous*" Journal of Financial Economics , 1976

[V] Le lecteur pourra se reporter à l'article de R.J. Elliott et de M. Jeanblanc, *Incomplete Makets and Informed Agents*, 1998

Résumons ici les étapes qui conduisent à déterminer à chaque pas de temps la valeur du sous-jacent :

I. Nous devons simuler un mouvement brownien
II. Nous devons simuler un processus de poisson
III. Nous devons simuler une loi de Bernouilli

I. Un brownien $W = \left(W_t, t \geq 0\right)$ est une variable qui suit une loi normale $N(0;t)$. Posons $W_t = \Psi \sqrt{t}$ où $\Psi \sim N(0;1)$, simuler notre brownien revient à simuler un nombre aléatoire qui suit une loi normale $N(0;1)$.

II. Dire que $M_t,\ t \geq 0$, suit un processus de poisson, c'est dire que la plupart du temps il n'y a pas de sauts, $dM_t = 0$ avec la probabilité $(1-\lambda)dt$, et que quelquefois un saut d'amplitude Φ survient, $dM_t = \Phi$ avec la probabilité $\lambda\, dt$.

En effet, la distribution d'une loi de poisson étant donnée par $P(X = k) = e^{-\lambda} \dfrac{\lambda^k}{k!}, \forall k \geq 0 \ et\, \lambda > 0$, il est aisé de calculer l'espérance de la variable aléatoire X, $E(X) = Var(X) = \lambda$. Ce résultat permet d'affirmer que le nombre de saut de sauts moyen est égal à λ, et donc pour une période de temps Δt, le nombre de sauts moyen sera $\lambda \Delta t$.

L'algorithme de simulation d'un processus de poisson est bien connu, et sa procédure peut être trouvée dans un article de Dupire[VI], dans la mesure où l'intervalle de temps est petit de sorte qu'il ne puisse subvenir qu'un et un seul saut dans cet intervalle.

III. L'amplitude Φ suit une loi de Bernouilli, qu'il est aisé de simuler. Il suffit de tirer un nombre au hasard de loi uniforme compris entre 0 et 1, puis de prendre comme amplitude Φ si ce nombre est supérieur à 0,5 et de prendre comme amplitude $-\Phi$ si ce nombre est inférieur à 0,5.

Puisque nous avons supposé que $\Phi > -1$ de sorte que les prix soient positifs, on alors -1< Φ <1.

Nous discrétisons au premier degré l'équation de S_t par la méthode d'Euler. A chaque pas de temps la valeur du sous-jacent vaut :

$$S_{t+\Delta t} = S_t \exp\left\{\left[r - \frac{\varphi^2}{2} - \lambda\Phi\right]\Delta t + \varphi\ \Psi\sqrt{\Delta t} + 1_{\{N<\lambda\}}\ 1_{\{\lambda\,\Delta t > U\}} \ln\left(1 + 1_{\{\varepsilon>0,5\}}\ \Phi - 1_{\{\varepsilon<0,5\}}\ \Phi\right)\right\}$$

Δ représente une variation finie,
$\Psi \sim N(0;1)$,
$U\ et\ \varepsilon$ représentent des nombres aléatoires de loi uniforme,
N est le nombre de sauts cumulés depuis l'instant t = 0.

[VI] Dupire, Monte Carlo Toolkit, 1998

Si le nombre de sauts cumulés, N , est inférieur au nombre de sauts moyens, λ ,alors l'actif sous-jacent peut encore évoluer par sauts, un saut intervenant si $\lambda\,\Delta t > U$. L'amplitude du saut est alors Φ, si la variable aléatoire ε est supérieure à 0.5, ou $-\Phi$ si la variable aléatoire ε est inférieure à 0.5.

Nous effectuons cette simulation en recourant au logiciel Excel. La méthode de Monte Carlo consiste à générer des séries, ou scénarii de prix d'actions en utilisant la formule du prix d'une action qui vient d'être dérivée.

Un scénario est généré par ligne, sur une période de durée 1 par tranche, ou pas de 0,01 période. Chaque série ou scénario comporte donc 100 périodes qui se retrouvent en colonnes. Au bout de chacune de celles-ci, on retranche le prix final du sous-jacent au prix d'exercice. Il ne reste plus qu'à calculer la moyenne actualisée de $(S_T - K)^+$ afin de déterminer le prix de notre call.

Nous répétons cette opération 5000 fois et nous générons donc 5000 scénarii.

Nous supposons que la call a les caractéristiques suivantes :

- Le prix du sous-jacent à l'instant t = 0, S_0, est 80,
- Le taux d'intérêt sans risque, r , est de 5%
- La volatilité du sous-jacent, σ , est de 20%
- Le prix d'exercice, K , est de 85
- La maturité de l'option, T , est d'un an.

Dans le tableau qui suit, nous montrons comment se présente la simulation de notre option sous Excel et nous évaluons le call avec par exemple $\lambda = 1$ et $\Phi = \pm 0{,}2$.

	t = 0	t = 0,01	t = 0,02	T = 0,03	t = 0,04	...	t = 0,96	t = 0,97	t = 0,98	t = 0,99	T = 1	$S_t - K$
Scénario 1	80	79,37	79,85	80,63	79,74		66,59	64,75	63,79	62,13	62,08	0,00
Scénario 2	80	78,45	79,14	80,27	80,90		89,78	91,85	93,78	97,21	99,34	14,34
Scénario 3	80	79,19	79,53	79,17	77,17		88,15	89,71	89,44	89,09	89,09	4,09
Scénario 4	80	82,25	82,47	82,34	82,15		81,06	79,16	81,88	82,13	83,11	0,00
Scénario 5	80	78,98	76,71	76,96	77,65		102,36	101,17	99,97	101,22	102,93	17,93
Scénario 6	80	76,35	77,43	74,33	75,94		77,56	78,33	78,18	76,71	76,72	0,00
Scénario 7	80	79,75	78,31	76,73	78,06		112,55	113,44	113,50	114,70	113,15	28,15
Scénario 8	80	80,25	81,53	82,03	80,97		63,85	62,75	64,42	61,68	61,75	0,00
...												
Scénario 4993	80	78,95	80,20	80,31	79,84		57,71	58,58	58,09	59,19	58,81	0,00
Scénario 4994	80	81,35	80,30	80,41	76,84		92,30	89,23	88,26	86,61	86,91	1,91
Scénario 4995	80	80,30	81,12	77,79	75,31		101,56	105,28	103,25	103,47	106,11	21,11
Scénario 4996	80	81,75	82,97	82,14	79,19		79,42	80,81	82,49	82,69	83,45	0,00
Scénario 4997	80	82,78	81,39	82,79	85,90		109,42	104,77	107,43	106,35	106,27	21,27
Scénario 4998	80	81,60	79,80	78,55	79,79		87,68	86,28	89,16	86,88	86,44	1,44
Scénario 4999	80	78,68	80,70	82,63	81,54		89,48	87,16	87,45	86,16	84,90	0,00
Scénario 5000	80	82,54	82,11	87,01	77,90		86,96	89,07	89,32	91,81	90,83	5,83

Moyenne	6,57
Moyenne actualisée	6,2540

Dans la prochaine partie nous présentons l'ensemble des résultats obtenus pour un nombre de sauts cumulé variant de 1 à 50. Il est déraisonnable de calculer le prix du call dans le cas où le nombre de sauts est compris entre 50 et 100. En effet, il est économiquement quasi impossible que plus de cinquante chocs puissent intervenir sur une période d'un an.

4. Résultats

Nous comparons donc le prix d'un call calculé par le modèle de Black et Scholes et le prix d'un call calculé quand des sauts interviennent aléatoirement à l'aide d'un tableau comparatif.

Dans la première colonne, figure le nombre de sauts (λ =1, λ =2, λ =3 ...), dans celle qui suit figure l'amplitude du saut. La troisième donne la valeur du call valorisé par le modèle de Black et de Scholes qui est de 5,9882. Enfin la quatrième colonne donne la valeur du call pour un nombre de sauts et une amplitude donnés.

		B&S	Sauts
λ =1	$\phi = 0$	5,9882	5,9882
	$\phi = \pm 0{,}12$	5,9882	6,0559
	$\phi = \pm 0{,}2$	5,9882	6,254
	$\phi = \pm 0{,}3$	5,9882	6,0778
	$\phi = \pm 0{,}5$	5,9882	6,0529
λ =3	$\phi = 0$	5,9882	5,9882
	$\phi = \pm 0{,}12$	5,9882	5,991
	$\phi = \pm 0{,}2$	5,9882	6,0694
	$\phi = \pm 0{,}3$	5,9882	6,07
	$\phi = \pm 0{,}5$	5,9882	6,027
λ =8	$\phi = 0$	5,9882	5,9882
	$\phi = \pm 0{,}12$	5,9882	6,1699
	$\phi = \pm 0{,}2$	5,9882	6,0227
	$\phi = \pm 0{,}3$	5,9882	6,1616
	$\phi = \pm 0{,}5$	5,9882	6,15
λ =15	$\phi = 0$	5,9882	5,9882
	$\phi = \pm 0{,}12$	5,9882	6,3621
	$\phi = \pm 0{,}2$	5,9882	6,3823
	$\phi = \pm 0{,}3$	5,9882	6,2662
	$\phi = \pm 0{,}5$	5,9882	6,1211
λ =30	$\phi = 0$	5,9882	5,9882
	$\phi = \pm 0{,}12$	5,9882	6,2857
	$\phi = \pm 0{,}2$	5,9882	6,2522
	$\phi = \pm 0{,}3$	5,9882	6,1544
	$\phi = \pm 0{,}5$	5,9882	6,1712

		B&S	Sauts
λ =2	$\phi = 0$	5,9882	5,9882
	$\phi = \pm 0{,}12$	5,9882	6,0212
	$\phi = \pm 0{,}2$	5,9882	6 ,0710
	$\phi = \pm 0{,}3$	5,9882	6,0505
	$\phi = \pm 0{,}5$	5,9882	6,027
λ =5	$\phi = 0$	5,9882	5,9882
	$\phi = \pm 0{,}12$	5,9882	6,0897
	$\phi = \pm 0{,}2$	5,9882	6,035
	$\phi = \pm 0{,}3$	5,9882	6,0261
	$\phi = \pm 0{,}5$	5,9882	5,9863
λ =10	$\phi = 0$	5,9882	5,9882
	$\phi = \pm 0{,}12$	5,9882	6,3201
	$\phi = \pm 0{,}2$	5,9882	6,2512
	$\phi = \pm 0{,}3$	5,9882	6,22
	$\phi = \pm 0{,}5$	5,9882	6,3284
λ =20	$\phi = 0$	5,9882	5,9882
	$\phi = \pm 0{,}12$	5,9882	6,1222
	$\phi = \pm 0{,}2$	5,9882	6,11
	$\phi = \pm 0{,}3$	5,9882	6,1454
	$\phi = \pm 0{,}5$	5,9882	6,2339
λ =50	$\phi = 0$	5,9882	5,9882
	$\phi = \pm 0{,}12$	5,9882	6,1919
	$\phi = \pm 0{,}2$	5,9882	6,0853
	$\phi = \pm 0{,}3$	5,9882	6,1544
	$\phi = \pm 0{,}5$	5,9882	6,053

Tableau comparatif

- La première remarque évidente que l'on peut constater est que, dans le cas où il n'y a pas de sauts, $\lambda = 0$, quelque soit l'amplitude choisie, le prix du call donnés par le modèle de Black & Scholes et celui calculé par notre simulation sont les mêmes. En effet si $\lambda = 0$, alors l'expression de S_t devient $S_t = S_0 \exp\left\{\left[r - \frac{\varphi^2}{2}\right]t + \varphi W_t\right\}$ et notre simulation donne bien le prix du call évalué par le modèle de Black et de Scholes.

- Deuxièmement, quelque soit le nombre de saut, pour une amplitude nulle, notre simulation montre que le prix calculé est égal au prix du call calculé par Black & Scholes.

- De plus, pour un nombre de sauts donné, et pour une amplitude qui a tendance à augmenter en valeur absolue, le prix du call augmente également.

- Enfin, si les prix des deux calls sont voisins, force est de constater que le prix d'un call évalué par un modèle à sauts est toujours supérieur au prix d'un call évalué par le modèle de Black et de Scholes. C'est sur ce point que nous mettons l'accent. En effet, l'intérêt de cette simulation est effectivement de montrer que le prix d'un call européen calculé par un modèle à sauts est supérieur au prix du même call calculé par le modèle de Black & scholes. En conséquence, le modèle de Black & Scholes sous-évalue le prix des options européennes.

- Si le prix du sous-jacent est proche de zéro, alors un saut d'amplitude négative ne jouera pas pleinement son rôle puisque le prix du sous-jacent est minoré par 0. A contrario, le prix du sous-jacent n'a pas de limite à la hausse, même si les arbres ne montent pas jusqu'au ciel. Un call étant un actif confère à son acquéreur le droit, mais non l'obligation d'acheter à l'échéance T une certaine quantité d'actif sous-jacent S à un prix déterminé K, il alors aisé de comprendre que les calls peuvent être plus sous-évalués que les puts.

5. Limites

Nous avons supposé que l'amplitude Φ suit une loi de Bernouilli, de sorte que l'amplitude soit Φ ou $-\Phi$ ce qui implique que -1< Φ <1. Supposer que Φ >-1 n'est pas une limite en soit puisque les prix ne chutent pas de 100% en une séance. Par contre supposer que Φ <1 est purement une limite de notre modèle. Choisir que l'amplitude Φ suit une loi de Bernouilli permet aux sauts d'être positifs ou négatifs et constants en valeur absolue, d'où Φ <1.

➯ Quelle loi faut-il alors choisir pour l'amplitude du saut ? Si nous choisissons une autre loi, cela améliorera-t-il notre résultat ?

Afin de simuler une variable de Poisson, nous avons dû choisir un intervalle de temps petit de sorte qu'il ne puisse subvenir qu'un et un seul saut dans cet intervalle. Or, nous avons obtenu le prix d'un call de maturité 1 an avec un pas de temps $\Delta t = 0{,}01$, soit en nombre de jours Δt = 3,65 jours. Peut-on certifier qu'un choc ne peut arriver que tous les 3,65 jours, même s'il s'agit un événement rare ?

6. Algorithme

Nous donnons dans cette partie la partie logique et algorithme permettant d'obtenir le prix d'un call calculé quand des sauts interviennent aléatoirement.

A. Déclaration des variables

B. A chaque pas de temps :

C. On déclare une variable telle que le saut est soit positif, soit négatif

D. Si elle est supérieure à 0,5 alors l'amplitude du saut est Φ. Sinon, l'amplitude du saut est $-\Phi$.

E. Si $\lambda \, \Delta t > U$ où U représente un nombres aléatoire de loi uniforme alors le nombre de sauts augmente de 1 et si le nombre cumulé < nombre de sauts total initialisé, c'est à dire λ, alors l'actif sous-jacent suit une dynamique à sauts. Sinon l'actif sous-jacent suit un processus d'évolution stochastique continu de Gauss-Wiener.

F. On répète les opérations B à E, a chaque pas de temps dt.

G. A l'échéance on calcule $(S_T - K)^+$

H. On répète les opérations B à G 5000 fois.

I. On actualise la moyenne de toutes les valeurs obtenues $(S_T - K)^+$, à l'étape G.